1 La Paretiana

Consideriamo una v.c. paretiana la cui fdp è

$$f(x_t;\theta) = \theta h^\theta x^{-(\theta+1)}$$

dove h è una grandezza nota. Questa v.c. ha media e varianza pari a

$$E(x_t) = h\frac{\theta}{\theta-1}$$

$$V(x_t) = h^2\frac{\theta}{(\theta-1)^2(\theta-2)}$$

Consideriamo ora lo stimatore ML di θ; la log-verosimiglianza media è

$$\ell(\theta) = \log\theta + \frac{\theta}{T}\sum_{t=1}^{T}\log\frac{h}{x_t} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\log x_t$$

da cui lo score

$$s(\theta) = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\log\frac{x_t}{h}$$

e l'Hessiano

$$H(\theta) = -\frac{1}{\theta^2}$$

Poiché l'Hessiano è nonstocastico, l'informazione è semplicemente pari a

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\theta^2}$$

Il valore di θ che azzera lo score è lo stimatore di ML, cioè

$$\hat\theta = \frac{T}{\sum_{t_1}^{T}\log\frac{x_t}{h}}$$

che, dalla teoria della stima di ML, sappiamo essere distribuito asintoticamente come segue:

$$\sqrt{T}\left(\hat\theta-\theta\right)\xrightarrow{d} N\left(0,\theta^2\right)$$

Vediamo ora come impostare un test dell'ipotesi $H_0:\theta=\bar\theta$. Cominciamo dal test LM: lo score in $\bar\theta$ è

$$s(\bar\theta) = \frac{1}{\bar\theta} - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\log\frac{x_t}{h}$$

che possiamo scrivere più semplicemente come

$$s(\bar{\theta}) = \bar{\theta}^{-1} - \hat{\theta}^{-1}$$

mentre la matrice di informazione è, sotto H_0,

$$\mathcal{I} = \bar{\theta}^{-2}$$

se ne deduce che il test LM ha questa forma:

$$LM = T\bar{\theta}^2 \left(\bar{\theta}^{-1} - \hat{\theta}^{-1}\right)^2$$

ossia

$$LM = T\left(1 - \frac{\bar{\theta}}{\hat{\theta}}\right)^2$$

Il test di Wald è basato sul fatto che $\sqrt{T}\left(\hat{\theta} - \theta\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \theta^2\right)$ cosicché

$$W = T\frac{\left(\hat{\theta} - \bar{\theta}\right)^2}{\hat{\theta}^2}$$

ossia

$$W = T\left(1 - \frac{\bar{\theta}}{\hat{\theta}}\right)^2$$

e coincide col test LM. Il test LR, invece, è dato da

$$LR = 2T\left(\ell(\hat{\theta}) - \ell(\bar{\theta})\right)$$

che nella fattispecie diventa

$$LR = 2T\left(1 - \log\frac{\bar{\theta}}{\hat{\theta}} - \frac{\bar{\theta}}{\hat{\theta}}\right)$$

che è diverso dagli altri due; tuttavia, se definiamo $\rho = \frac{\bar{\theta}}{\hat{\theta}}$, espandendo in serie di Taylor la funzione

$$f(\rho) = 1 - \log\rho - \rho$$

intorno a $\rho = 1$, si ha che approssimativamente

$$f(\rho) \simeq \frac{1}{2}(1-\rho)^2$$

e quindi $LM = W \simeq LR$.

2 L'esponenziale negativa

Consideriamo una v.c. esponenziale negativa la cui fdp è

$$f(x_t; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x_t}$$

la log-verosimiglianza media è

$$\ell(\lambda) = \log \lambda - \lambda \bar{X}$$

cosicché lo score è

$$s(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \bar{X}$$

e l'Hessiano è

$$H(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}$$

Poiché l'Hessiano è nonstocastico, la matrice di informazione è semplicemente pari a

$$\mathcal{I}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Azzerando lo score si ottiene che

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$$

L'ipotesi $H_0 : \lambda = 1$ si può testare nei tre modi classici. Il test LM è dato da

$$LM = T \left\{ s(1)^2 \mathcal{I}(1)^{-1} \right\} = T(\bar{X} - 1)^2$$

mentre il test di Wald è

$$W = T(\hat{\lambda} - 1)^2 V(\hat{\lambda})^{-1} = T \left(\frac{\bar{X} - 1}{\bar{X}} \right)^2 \bar{X}^2 = T(\bar{X} - 1)^2$$

Per calcolare il test LR, osserviamo che

$$\ell(\hat{\lambda}) - \ell(1) = \left[-\log \bar{X} - 1 \right] - \left[-\bar{X} \right]$$

e quindi

$$LR = 2T \left[(\bar{X} - 1) - \log \bar{X} \right]$$

Molti dei risultati sono simili a quelli ottenuti con la paretiana. Questo non dovrebbe sorprendere, alla luce della considerazione che, se x_t è una paretiana, allora $\log \frac{x_t}{h}$ è un'esponenziale negativa.

3 La Binomiale negativa

La fdp della binomiale negativa è

$$P(x_t = k; \theta) = (1-\theta)\theta^{x_t}$$

con $0 < \theta < 1$, che può essere interpretata come segue: se un evento ha probabilità θ di verificarsi, allora $P(x_t = k; \theta)$ è la probabilità che l'evento si verifichi dopo k prove. Calcolare i momenti è semplice attraverso la funzione generatrice dei momenti[1], che è

$$M(t) = \frac{1-\theta}{1-\theta e^t}$$

e quindi

$$E(x_t) = \frac{\theta}{1-\theta}$$

La stima di MV di θ è semplice una volta scritta la log-verosimiglianza media

$$\ell(\theta) = \log(1-\theta) + \bar{X}\log\theta$$

da cui lo score

$$s(\theta) = \frac{\bar{X}}{\theta} - \frac{1}{1-\theta}$$

e l'Hessiano

$$H(\theta) = -\left(\frac{\bar{X}}{\theta^2} + \frac{1}{(1-\theta)^2}\right)$$

Si ricavano immediatamente

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}+1}$$

e

$$\mathcal{I}(\theta) = \frac{1}{\theta(1-\theta)^2}$$

Testiamo l'ipotesi $H_0 : \theta = 1/2$; cominciamo col test di Wald:

$$W = T(\hat{\theta} - \frac{1}{2})^2 \frac{1}{\hat{\theta}(1-\hat{\theta})^2}$$

che è pari a

$$W = \frac{T}{4}\frac{\bar{X}+1}{\bar{X}}(\bar{X}-1)^2$$

[1]Ricordo che la funzione generatrice dei momenti, definita come $M(t) = E(e^{tX})$, ha la proprietà per cui la derivata k-esima, valutata in $t = 0$, dà il momento k-esimo di X.

Il test LM, invece è

$$LM = T\left(\frac{\bar{X}}{1/2} - \frac{1}{1/2}\right)^2 \mathcal{I}(1/2)^{-1}$$

ossia (dopo alcune facili semplificazioni),

$$LM = \frac{T}{2}(\bar{X} - 1)^2$$

La relazione che intercorre fra i due è semplicemente

$$W = LM\frac{\bar{X} + 1}{2\bar{X}}$$

Il test del rapporto di verosimiglianza, invece, si costruisce facilmente considerando che

$$\ell(\hat{\theta}) = \bar{X}\log(\bar{X}) - (\bar{X} + 1)\log(\bar{X} + 1)$$

mentre

$$\ell(1/2) = (\bar{X} + 1)\log(1/2)$$

e quindi

$$LR = 2T\left[\bar{X}\log(\bar{X}) - (\bar{X} + 1)\log\left(\frac{\bar{X} + 1}{2}\right)\right]$$

Ecco un grafico con i valori dei tre test in funzione di $\bar{X}$ e un'ampiezza campionaria $T = 100$.